

# Raketenbahnen

Andreas Müller

## 1 Problemstellung

Modellraketenbauer verwenden für die Planung der Flüge ihrer Modellraketen meistens mehr oder weniger komplizierte Simulationsprogramme, welche die Flugbahnen durch numerische Integration berechnen und damit auch die erreichte Scheitelhöhe und die Flugzeit bis zum Scheitel als Nebenprodukte liefern. Für die Sicherheitsbeurteilung eines Fluges sind jedoch nur genau die zwei genannten Werte notwendig, sie geben Antwort auf die Fragen:

1. Fliegt die Rakete nicht zu hoch? Bleibt die Rakete im freigegebenen Luftraum, wird sie auch innerhalb der Range wieder landen?
2. Ist die Zeiteinstellung für die Ausstossladung (pyrotechnisch über ein Verzögerungselement oder mittels elektronischen Timers) korrekt, wird der Fallschirm ungefähr in Scheitelnähe ausgestossen werden?

Um diese Fragen zu beantworten, müssen die Bewegungsgleichungen der Rakete integriert werden. Da nur die Vertikale interessiert, genügt es, die Gleichungen eindimensional anzusetzen. Die Newtonschen Prinzipien besagen, dass

$$\frac{d}{dt}(mv) = -\frac{1}{2}\rho A c_w v^2 - mg + F \quad (1)$$

Darin ist  $v$  die Vertikalgeschwindigkeit, positiv solange die Rakete steigt. Da die Masse  $m$  der Rakete mindestens während der Schubphase abnimmt, darf man die sonst übliche Vereinfachung  $\frac{d}{dt}(mv) = m\frac{dv}{dt}$  hier nicht verwenden.  $A$  ist die Querschnittsfläche der Rakete,  $c_w$  ihr Luftwiderstandsbeiwert,  $\rho$  die Luftdichte. Die Schubkraft  $F$  ist natürlich nur während der Brenndauer des Motors von 0 verschieden.  $g$  ist die Erdbeschleunigung.

Viele dieser Grössen sind keine Konstanten, die Luftdichte  $\rho$  hängt von der Höhe ab, der  $c_w$ -Wert wird im Bereich der Schallgeschwindigkeit dramatisch grösser,  $g$  wird mit zunehmender Höhe geringer. Allerdings sind diese Abhängigkeiten derart kompliziert, dass eine genaue Berechnung der Flugbahn unter all

diesen Einflüssen nur mit einer numerischen Simulation möglich ist. Es gibt keine geschlossenen Formeln, mit denen man Scheitelhöhe und Flugzeit bis zum Scheitel in einfacher Weise ausrechnen könnten.

Für eine angenäherte Berechnung sind also Vereinfachungen nötig:

1. Die Masse des Treibmittels ist im Vergleich zur Gesamtmasse einer Modellrakete meistens sehr gering, etwa 10%. Ausserdem ist der Masseverlust während der Schubphase nicht bekannt, die üblichen Motordatenblätter liefern dazu keine Angaben. Daher kann man als Näherung die variable Masse während der Schubphase durch eine Konstante

$$m^* = m_0 + \frac{1}{2}m_{\text{Treibmittel}} \quad (2)$$

ersetzen. Zu beachten:  $m_0$  ist die Masse der Rakete und des leeren Treibsatzgehäuses.

2. Jeder Raketenmotor hat seine eigene charakteristische Schubkurve. Zwar haben Motoren mit Bates-Grains theoretisch weitgehend ausgeglichene Schubcharakteristik, doch in der Praxis stellt man bei allen Motoren mehr oder weniger grosse Abweichungen fest. Ohne Schubkurve sind jedoch nur der Gesamtimpuls  $I_{\text{tot}}$  und der Durchschnittsschub  $F$  bekannt. Für eine angenäherte Berechnung muss man sich mit diesen Grössen begnügen. Man kann daraus auch noch die Brennschlusszeit

$$t_B = t_{\text{Brennschluss}} = \frac{I_{\text{tot}}}{F} \quad (3)$$

bestimmen.

3. Die Luftdichte variiert bei nicht allzu grosser Flughöhe nicht sehr stark, sie nimmt bei einem Flug auf 1000m Scheitelhöhe um etwa 10% ab. Daher darf für eine angenäherte Berechnung die Luftdichte  $\rho$  als konstant angenommen werden.
4. Meist kommt die Geschwindigkeit einer Modellrakete nicht in die Nähe der Schallgeschwindigkeit. Daher darf der  $c_w$ -Wert als konstant angenommen werden.

Mit diesen Vereinfachungen können die Bewegungsgleichungen in zwei einfachere Gleichungen umgeformt werden:

$$m^* \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\rho A c_w v^2 - m^* g + F \quad (4)$$

$$m_0 \frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\rho A c_w v^2 - m_0 g \quad (5)$$

Die Gleichung (4) ist nur während der Brenndauer  $t_B$  gültig, anschliessend gilt die Gleichung für die Freiflugphase (5). Um Scheitelhöhe und Zeit bis zum Scheitel zu bestimmen, löst man die Gleichungen wie folgt:

1. Finde eine Lösung von (4) mit Anfangsbedingung  $h = 0$  und  $v = 0$  zur Zeit  $t = 0$ . Bestimme aus dieser Lösung die Brennschlusshöhe  $h_B$  und die Brennschlussgeschwindigkeit  $v_B$ .
2. Ist  $v_B$  bereits grösser als Mach 0.8, ist die Vereinfachung betreffend die Konstanz von  $c_w$  nicht mehr gültig, die Näherungen sind nicht anwendbar.
3. Finde eine Lösung von (5) mit Anfangsbedingung  $h = h_B$  und  $v = v_B$  zur Zeit  $t_B$ . Finde das Maximum dieser Lösung, also Scheitelzeit und Scheitelhöhe.

Die derart vereinfachten Gleichungen heissen die Fehskens-Malewicki Gleichungen. Im Folgenden zeigen wir, dass sich die Lösungen beider Differentialgleichungen in geschlossener Form angeben lassen. Die in den folgenden zwei Abschnitten dargestellten Lösungen werden auch in [5] besprochen. Dort werden die durch die genannten Annahmen bewirkten Fehler jedoch nur numerisch an einzelnen Beispielen untersucht.

## 2 Lösungen der Bewegungsgleichung

Eigentlich unterscheiden sich die Gleichungen (4) und (5) kaum: Der Koeffizient vor  $\frac{dv}{dt}$  ist jedesmal eine Konstante ( $m^*$  und  $m_0$ ), auf der rechten Seite steht ausser dem Luftwiderstandsterm ebenfalls nur die Konstante  $-m^*g + F$  bzw.  $-m_0g$ . Daher sollten wir mit der Lösung einer einzigen Gleichung auskommen.

Wir bestimmen die Lösung von (4), die andere Lösung lässt sich dann durch Ersetzen von  $m^*$  durch  $m_0$  bzw.  $F$  durch 0 erhalten.

Da in der Gleichung die Höhe nicht explizit eingeht, haben wir eigentlich mit einer Differentialgleichung erster Ordnung für  $v$  zu tun, die wir explizit auch so schreiben können:

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\rho A c_w}{2m^*} v^2 - g + \frac{F}{m^*}. \quad (6)$$

Wir schreiben

$$a = \sqrt{\frac{\rho A c_w}{2m^*}} \quad (7)$$

$$b = \sqrt{\left| -g + \frac{F}{m^*} \right|}. \quad (8)$$

Damit erhält die Differentialgleichung die Form

$$\frac{dv}{dt} = -a^2v^2 \pm b^2. \quad (9)$$

Für die Schubphase ist das Vorzeichen von  $b^2$  positiv zu wählen, für die Freiflugphase, in der die Schwerkraft  $g$  überwiegt, ist das negative Zeichen zu verwenden.

Die Gleichung (9) kann wie folgt gelöst werden:

$$\begin{aligned} -\frac{dv}{a^2v^2 \mp b^2} &= dt \\ \int \frac{dv}{a^2v^2 \mp b^2} &= -t + C \end{aligned} \quad (10)$$

Die Bewegungsgleichung für  $v$  ist also im wesentlichen gelöst, wenn das Integral (10) berechnet werden kann.

Zwar kann man das Integral (10) durchaus in einer anständigen Integraltafel finden (zum Beispiel [3]), die direkte Berechnung ist jedoch auch einigermaßen instruktiv. Zunächst kann man mit Hilfe der Variablentransformation  $x = \frac{av}{b}$  folgende Vereinfachung erhalten:

$$\int \frac{dv}{a^2v^2 \pm b^2} = \frac{b}{a} \int \frac{dx}{b^2x^2 \pm b^2} = \frac{1}{ab} \int \frac{dx}{x^2 \pm 1}. \quad (11)$$

Die Fälle verschiedener Vorzeichen führen zu gänzlich unterschiedlichen Lösungen, so dass wir sie einzeln behandeln.

Um das Integral  $\int \frac{dx}{x^2+1}$  zu berechnen, muss man sich an die Ableitung des arctan erinnern:

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{x^2 + 1}. \quad (12)$$

setzt man jetzt alles wieder ein, dann erhält man

$$\int \frac{dv}{a^2v^2 + b^2} = \frac{1}{ab} \arctan x = \frac{1}{ab} \arctan \frac{a}{b}v \quad (13)$$

Für das Integral  $\int \frac{dx}{1-x^2}$  funktioniert alles fast gleich, die trigonometrischen Funktionen sind jedoch durch die jeweiligen Hyperbelfunktionen zu ersetzen. Es ist

$$\frac{d}{dx} \operatorname{artanh} x = \frac{1}{1-x^2} \quad (14)$$

woraus wir wie vorher für das Integral

$$-\int \frac{dv}{a^2v^2 - b^2} = \frac{1}{ab} \operatorname{artanh} \frac{a}{b}v \quad (15)$$

erhalten.

### 3 Schubphase

In der Schubphase überwiegt der Schub, es ist in (9) das positive Zeichen zu verwenden, also die Lösung mit den hyperbolischen Funktionen. Man findet für die Geschwindigkeit durch Einsetzen

$$v(t) = \frac{b}{a} \tanh abt \quad (16)$$

Dabei ist auch die Anfangsbedingung  $v(0) = 0$  offensichtlich schon berücksichtigt. Insbesondere finden wir durch Einsetzen der Brennschlusszeit  $t_B$  die Brennschlussgeschwindigkeit

$$v_B = \frac{b}{a} \tanh abt_B. \quad (17)$$

Als Anfangsbedingung für die Freiflugphase brauchen wir aber noch die Höhe bei Brennschluss. Dazu integrieren wir  $v(t)$  nach der Zeit:

$$\begin{aligned} h(t) = \int_0^t v(\tau) d\tau &= \frac{b}{a} \int_0^t \tanh ab\tau d\tau \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^t \tanh ab\tau ab d\tau \\ &= \frac{1}{a^2} \int_0^{abt} \tanh s ds \end{aligned} \quad (18)$$

$$= \frac{1}{a^2} \log \cosh abt \quad (19)$$

In (18) haben wir  $s = ab\tau$  substituiert. In (19) weisen wir darauf hin, dass durch Einsetzen der unteren Grenze  $t = 0$  gerade  $\log \cosh 0 = \log 1 = 0$  herauskommt. Damit ist die Differentialgleichung für die Schubphase vollständig gelöst. Wir brauchen für das Gesamtproblem ausschliesslich Brennschlusshöhe und -geschwindigkeit, wir fassen die Resultate hier nochmals zusammen:

**Satz 1.** *Eine Rakete mit Leermasse  $m_0$  erreicht auf einem Motor mit Durchschnittsschub  $F$ , Brenndauer  $t_B$  und Treibmittelmasse  $T_{\text{Treibmittel}}$  folgende Brennschlusshöhe und -geschwindigkeit:*

$$h_B = \frac{1}{a^2} \log \cosh abt_B \quad (20)$$

$$v_B = \frac{b}{a} \tanh abt_B \quad (21)$$

wobei folgende Hilfsgrössen verwendet werden:

$$m^* = m_0 + \frac{1}{2}m_{\text{Treibmittel}}, \quad a = \sqrt{\frac{\rho A c_w}{2m^*}}, \quad b = \sqrt{\left|g - \frac{F}{m^*}\right|} \quad (22)$$

## 4 Freiflugphase

In der Freiflugphase dominiert die Schwerkraft, in (9) ist das negative Zeichen zu verwenden, also die Lösungen mit den trigonometrischen Funktionen. Für die Geschwindigkeit ergibt sich

$$v(t) = -\frac{a}{b} \tan ab(t + C), \quad (23)$$

wobei die Integrationskonstante noch zu bestimmen ist. Sie ergibt sich durch Einsetzen der Anfangsbedingung für die Geschwindigkeit:

$$\begin{aligned} v_B &= -\frac{b}{a} \tan ab(t_B + C) \\ t_B + C &= -\frac{1}{ab} \arctan \frac{a}{b} v_B \\ C &= -t_B - \frac{1}{ab} \arctan \frac{a}{b} v_B \end{aligned}$$

Nun interessiert uns an der Lösung für die Freiflugphase nur der Scheitel, also die Zeit  $t_s$ , zu der die Geschwindigkeit 0 wird. Da  $\tan$  dann verschwindet, wenn das Argument verschwindet, folgt aus (23)

$$t_s = -C = t_B + \frac{1}{ab} \arctan \frac{a}{b} v_B \quad (24)$$

Wie im Falle der Schubphase bleibt jetzt nur noch, die Höhe durch Integration der geschwindigkeit zu bestimmen:

$$\begin{aligned} h_s &= h_B + \int_{t_B}^{t_s} v(t) dt \\ &= h_B - \frac{b}{a} \int_{t_B}^{t_s} \tan(ab(t - t_s)) dt \\ &= h_B - \frac{b}{a} \int_{t_B - h_s}^0 \tan ab\tau d\tau \\ &= h_B + \frac{b}{a} \int_0^{t_s - t_B} \tan ab\tau d\tau \\ &= h_B + \frac{1}{a^2} \int_0^{ab(t_s - t_B)} \tan x dx \end{aligned} \quad (25)$$

$$= h_B - \frac{1}{a^2} \log \cos ab(t_s - t_B) \quad (26)$$

In (25) haben wir die Substitution  $x = ab\tau$  verwendet. Somit haben wir auch für die Freiflugphase eine vollständige Lösung gefunden, aus der wir die Scheitelhöhe und die Flugzeit bis zum Scheitel ableiten können:

Motor	$f$ $t_B$ $m_{\text{Treibmittel}}$	Durchschnittsschub Brenndauer Treibmittelmasse
Rakete	$m_0$ $A$ $c_w$	Leermasse der Rakete Querschnittsfläche Luftwiderstandsbeiwert
Atmosphäre	$\rho$	Luftdichte

Tabelle 1: Einflussfaktoren auf eine Raketenflugbahn

**Satz 2.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 erreicht die Rakete die Scheitelhöhe  $h_S$  nach der Flugzeit  $t_S$  wie folgt:*

$$t_S = t_B + \frac{1}{ab} \arctan \frac{a}{b} v_B \quad (27)$$

$$h_S = h_B - \frac{1}{a^2} \log \cos ab(t_S - t_B) \quad (28)$$

$$= h_B + \frac{m_0}{\rho A c_w} \log \left( 1 + \frac{\rho A c_w}{2m_0 g} v_B^2 \right) \quad (29)$$

Die Brennschlussparameter  $h_B$  und  $v_B$  sind dem Satz 1 zu entnehmen. Für  $a$  und  $b$  sind

$$a = \sqrt{\frac{\rho A c_w}{2m_0}}, \quad b = \sqrt{g} \quad (30)$$

Man beachte, dass für diese Gleichung die Konstanten  $a$  und  $b$  andere Werte haben als in Satz 1.

## 5 Nomogramme für den Scheitelpunkt

Der Scheitelpunkt einer Raketenflugbahn wird von Parametern gemäss Tabelle 1 bestimmt. Da die drei vom Motor bestimmten Einflussfaktoren in verschiedenen Kombinationen in die Lösung eingehen, ist ein zweidimensionales Kurvendiagramm für den Scheitel für jedes beliebige Tripel  $(F, t_B, m_{\text{Treibmittel}})$  nicht möglich. Da wegen der begrenzten Auswahl erhältlicher Motoren ohnehin nur eine diskrete Auswahl solcher Tripel realisiert wird, bleibt als nächstbeste Lösung, ein Nomogramm für jeden Motor zu erstellen, welches nur noch die durch die Rakete und die Atmosphäre bedingten Einflussfaktoren als variabel berücksichtigen muss.

Die Nomogrammtechnik würde durchaus erlauben, die funktionalen Zusammenhänge zwischen den Motordaten und den gesuchten Grössen  $t_S$  und  $h_S$  darzustellen [2], so dass nur ein einziges, allerdings recht komplexes Nomogramm

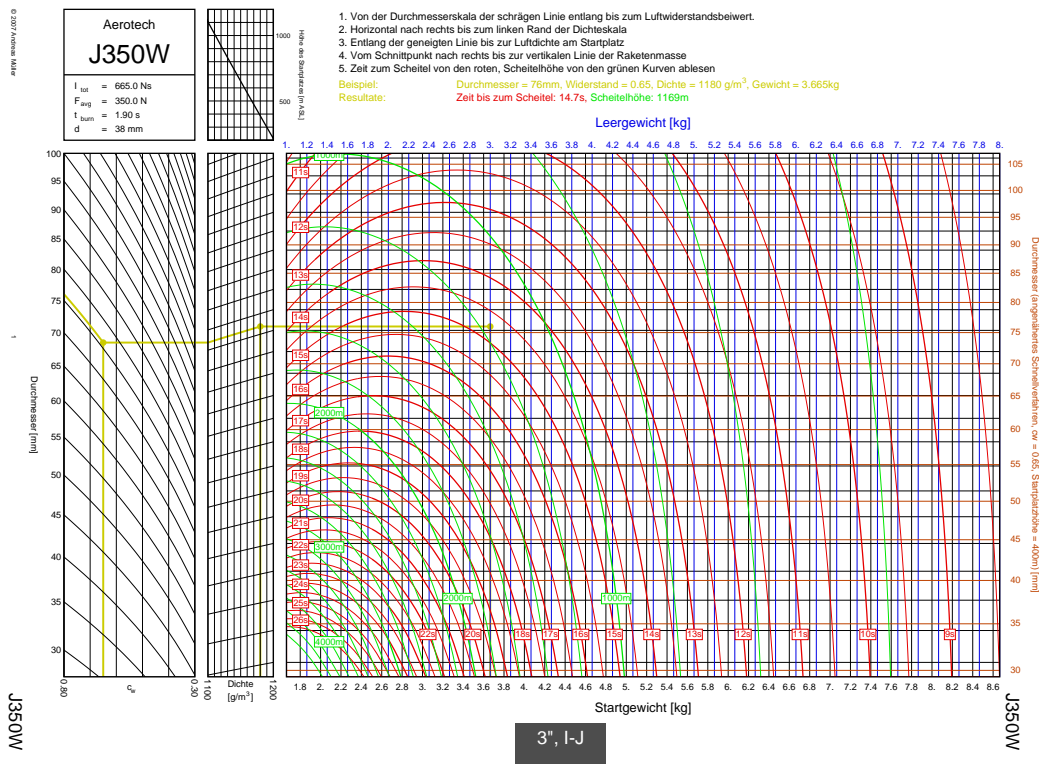


Abbildung 1: Nomogramm für die Bestimmung von Scheitelhöhe und Flugzeit zum Scheitel für den Raketenmotor Aerotech J350W.



notwendig wäre. Allerdings wäre mit einem solchen Nomogramm kaum mehr darstellbar, wie zuverlässig die gefundene Lösung ist, und wie empfindlich sie auf Variationen der Parameter reagiert. In der synoptischen Darstellung des Kurvendiagrammes gibt die Krümmung und Neigung der Kurven zusätzlich ein Mass dafür, wie gut ein bestimmter Motor für eine Rakete geeignet ist.

In die Lösungen (2) gehen  $\rho$ ,  $A$  und  $c_w$  nur als Produkt  $K = \rho A c_w$  ein. Ein Nomogramm zur Bestimmung des Scheitelpunktes besteht also zunächst aus einem Teilnomogramm, welches  $K$  bestimmt. Der Scheitelpunkt hängt dann nur noch von  $K$  und  $m_0$  ab, was mit einem gewöhnlichen zweidimensionalen Nomogramm realisiert werden kann.

In Abbildung 1 ist ein Nomogramm für den Motor Aerotech J350W dargestellt. Es beginnt links mit einem zweidimensionalen Nomogramm, in welchem auf der vertikalen Achse den Durchmesser als ein dem Raketenbauer geläufigeres Mass für den Querschnitt abgetragen ist. Auf der horizontalen Achse ist der  $c_w$ -Wert eingezeichnet, der durch den Raketenbauer geschätzt werden muss. So wird das Produkt  $A c_w$  gefunden. Im zweiten Rechteck wird dieses Produkt mit der Dichte multipliziert, welche auf der horizontalen Achse abgetragen ist. Da die Dichte meist nicht direkt bekannt ist, kann aus dem darüberliegenden Quadrat mit der Kurve der ICAO Normalatmosphäre eine mittlere Dichte aus der Höhe der Launch Site über Meer geschätzt werden. Damit ist  $k$  bekannt.

Im rechten Teil des Nomogramms sind Niveaulinien für  $t_S$  und  $h_S$  eingezeichnet. Die grünen Linien fassen Punkte gleicher Scheitelhöhe zusammen, die roten Linien beschreiben Punkte gleicher Flugzeit bis zum Scheitel. Um  $t_S$  und  $h_S$  zu finden, bestimmt man zunächst  $K$  und  $m$ , und zeichnet den Punkt  $(m, K)$  ein. Dann liest man mit Hilfe der Niveaulinien die zugehörigen Werte von  $h_S$  und  $t_S$  ab.

Die Steigung der Kurven an einer bestimmten Stelle lässt Schlüsse auf die dominierenden Effekte zu:

1. Offensichtlich gibt es eine Masse, bei der zu gegebenem  $K$ -Wert die maximale Höhe erreicht wird. Man findet ihren Wert, indem man die grüne Kurve sucht, die die zu  $K$  gehörende horizontale Gerade berührt.
2. Analog gibt es zu festem  $K$  eine Masse, die zu maximaler Flugzeit bis zum Scheitel führt. Sie ist im Allgemeinen von der Masse für maximale Flughöhe verschieden.
3. Im absteigenden Teil der Kurven sind die  $h_S$ -Kurven immer steiler als die  $t_S$ -Kurven, d. h. die Scheitelzeit ist empfindlicher auf Änderungen der Aerodynamik als die Scheitelhöhe.
4. Bei grosser Masse werden die Kurven steiler, der  $K$ -Wert wird für den Scheitelpunkt immer weniger wichtig.

## 6 Berücksichtigung des Masseflusses

In den bisher betrachteten Lösungen war der Massefluss während der Brenndauer des Motors nicht berücksichtigt worden. Dieser führt zu einem zusätzlichen beschleunigenden Term, die bisher konstruierten Lösungen (2) führen also systematisch zu einer zu geringen Höhe. Im Vergleich dazu ist die Ersetzung der Masse durch  $m^*$  unproblematisch, weil sie die Masse zu ungefähr gleichen Zeiten unterwie überschätzt. Daher dürfte die Berücksichtigung des Massenflusses eine Verbesserung der Resultate bringen, glücklicherweise sind die Differentialgleichungen damit immer noch geschlossen integrierbar.

Die Differentialgleichungen (1) muss jetzt die veränderliche Masse berücksichtigen, und wird daher zu

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{\rho A c_w v^2}{2m} - g + \frac{F}{m} - v \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} \quad (31)$$

Wir schreiben  $\dot{m}$  für die Ausströmrates der Masse, es ist

$$\dot{m} = -\frac{m_{\text{Treibmittel}}}{t_B}. \quad (32)$$

An Stelle der Gleichung (4) ist jetzt

$$m^* \frac{dv}{dt} = \frac{1}{2} \rho A c_w v^2 - \dot{m} v - m^* g + F \quad (33)$$

zu verwenden. Mit  $c = -\frac{\dot{m}}{m^*}$  bedeutet dies, dass für die Lösung der Bewegungsgleichung jetzt das Integral

$$t + C = - \int \frac{dv}{a^2 v^2 - cv - b^2} \quad (34)$$

zu bestimmen ist. Mit der Substitution

$$v = \frac{1}{2a} \sqrt{4b^2 + c^2} x + \frac{c}{2} \quad (35)$$

wird das Integral zu

$$\frac{2}{a\sqrt{4b^2 + c^2}} \int \frac{dx}{1 - x^2} = \frac{2}{a\sqrt{4b^2 + c^2}} \operatorname{artanh} x. \quad (36)$$

Auflösung nach  $x$  ergibt

$$x = \tanh \frac{a}{2} \sqrt{4b^2 + c^2} (t + C) \quad (37)$$

$$v = \frac{1}{2a} \sqrt{4b^2 + c^2} \tanh \frac{a}{2} \sqrt{4b^2 + c^2} (t + C) + \frac{c}{2} \quad (38)$$

Die Integrationskonstante  $C$  ist in dieser Form etwas unpraktisch, wir schreiben

$$\frac{a}{2}\sqrt{4b^2 + c^2}C = \delta, \quad (39)$$

zusammen erhalten wir für die Geschwindigkeit

$$v = \frac{c}{2} + \frac{1}{2a}\sqrt{4b^2 + c^2} \tanh\left(\frac{a}{2}\sqrt{4b^2 + c^2}t + \delta\right). \quad (40)$$

Aus der Anfangsbedingung für  $t = 0$  folgt,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2a}\sqrt{4b^2 + c^2} \tanh \delta &= -\frac{c}{2} \\ \Rightarrow \delta &= -\operatorname{artanh} \frac{ac}{\sqrt{4b^2 + c^2}} \end{aligned} \quad (41)$$

Für die Höhe findet man durch Integration

$$h(t) = \frac{c}{2}t + \frac{1}{a^2} \log \cosh\left(\frac{1}{2}a\sqrt{4b^2 + c^2}t + \delta\right) \quad (42)$$

Im Grenzwert  $c \rightarrow 0$  geht  $\delta \rightarrow 0$  und  $\sqrt{4b^2 + c^2} \rightarrow 2a$ , so dass für  $h(t)$  und  $v(t)$  wieder die Formeln aus Abschnitt 3 entstehen.

**Satz 3.** *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 wird unter Berücksichtigung des Massenverlustes die Brennschlusshöhe und -geschwindigkeit*

$$h_B = \frac{c}{2}t + \frac{1}{a^2} \log \cosh\left(\frac{a}{2}\sqrt{4b^2 + c^2}t_B + \delta\right) \quad (43)$$

$$v_B = \frac{c}{2} + \frac{1}{a}\sqrt{4b^2 + c^2} \tanh\left(\frac{a}{2}\sqrt{4b^2 + c^2}t_B + \delta\right) \quad (44)$$

erreicht, wobei die zusätzlichen Größen  $c$  und  $\delta$  definiert sind durch

$$c = -\frac{\dot{m}}{m^*} = \frac{m_{\text{Treibmittel}}}{m^*t_B}, \quad \delta = -\operatorname{artanh} \frac{ac}{\sqrt{4b^2 + c^2}}. \quad (45)$$

Die tatsächliche Durchführung der Korrektur zeigt, dass sich die erreichte Brennschlusshöhe durch die Korrektur nur um einige Millimeter verbessert wird. Bei einem J350W ergibt sich zum Beispiel für eine Rakete mit 4.5kg Startgewicht und 120mm Durchmesser

	ohne $\dot{m}$	mit $\dot{m}$	$\Delta$
$v_B$	56.783369	56.784842	0.001473
$h_B$	58.093908	58.095076	0.001168

Die Rakete fliegt dank dieses Effektes also nur gut 1mm höher, und ist etwa 1.5mm/s schneller.

## 7 Störungsrechnung

Die geschlossenen Formeln (2) liefern eine sehr effiziente Lösung für das Grundproblem des Raketenbauers, solange die in Abschnitt 1 beschriebenen Näherungen zulässig sind. Bei Langbrennern (J90, J135, K185) schwankt der Schub über die Brenndauer sehr stark, so dass Näherung 2 nicht anwendbar ist. Bei leichten Raketen ist 1 nicht mehr zutreffend, und bei sehr schnellen Raketen versagt 4. Und bei sehr hoch fliegenden Raketen muss man 3 anzweifeln.

Sobald man eine der Vereinfachungen rückgängig machen will, werden die Differentialgleichungen nicht mehr geschlossen lösbar sein. Daher wird man in jedem Fall auf numerische Integration angewiesen sein. Da auch in der Differentialgleichung nur das Produkt  $K = \rho A c_w$  eingeht, aber keiner seiner Faktoren, wird es immer zwei Funktionen (68) geben, nur sind sie wegen der numerischen Integration jetzt etwas aufwendiger zu berechnen. Ersetzt man also die geschlossenen Formeln (2) durch numerisch integrierte Funktionen (68), können wie vorher Nomogramme für das Scheitelpunktproblem gezeichnet werden, die jetzt aber eine höhere Genauigkeit aufweisen.

Eine vollständige numerische Integration ist jedoch gar nicht erforderlich. Da nur eine Korrektur gegenüber der mit konstanter Dichte oder konstanter Masse gerechneten Bahn zu bestimmen ist, kann dies auch mit Hilfe einer Störungsrechnung geschehen.

### 7.1 Dichteabnahme mit der Höhe

Die Dichte der Atmosphäre ist nicht konstant, sondern nimmt mit zunehmender Höhe ab. Die barometrische Höhenformel gibt zusammen mit der Temperaturprofil der Atmosphäre Auskunft über das Dichteprofil. Für unsere Zwecke ausreichend genau ist eine Normalatmosphäre, also eine als trocken angenommene Atmosphäre mit einem Temperaturgradienten von  $-0.0065\text{K/m}$ .

In der ICAO-Standardatmosphäre hat die Luft auf Höhe  $h$  die Dichte

$$\rho(h) = \frac{p_0 M}{R(T_0 + \gamma h)} \left(1 + \frac{\gamma h}{T_0}\right)^{-\frac{Mg}{\gamma R}} \quad (46)$$

Darin ist  $g = 9.81\text{m/s}^2$  die Erdbeschleunigung,  $p_0 = 1013.25\text{hPa}$  und  $T_0 = 288.15\text{K}$  Luftdruck und Temperatur auf Höhe 0,  $\gamma = -0.0065\text{K/m}$  der Temperaturgradient,  $R = 8.3145\text{J/K}$  die universelle Gaskonstante und  $M = 0.02896\text{kg/mol}$  die molare Masse trockener Luft.

Die Dichteabnahme auf der Höhe  $h$  ist

$$\frac{d\rho(h)}{dh} = -\frac{p_0 M (gM + \gamma R)}{R(T_0 + \gamma h)^2} \left(1 + \frac{\gamma h}{T_0}\right)^{-\frac{Mg}{\gamma R}} = -\frac{gM + \gamma R}{T_0 + \gamma h} \rho(h) \quad (47)$$

In linearer Näherung ist die Dichteabnahme also

$$\varrho(h) \simeq \varrho(h_0) \left( 1 - \frac{gM + \gamma R}{T_0 + \gamma h_0} (h - h_0) \right) = \varrho(h_0) (1 - \varrho_1 (h - h_0)) \quad (48)$$

mit

$$\varrho_1 = \frac{gM + \gamma R}{T_0 + \gamma h_0} \simeq 0.000806 \text{m}^{-1} \quad \text{für } h = 400 \text{m}. \quad (49)$$

## 7.2 Dichteabnahme in der Schubphase

In erster Näherung nimmt die Dichte linear mit der Höhe ab, wir setzen daher an  $\varrho = \varrho_0(1 - \varrho_1(h))$ . Die Dichteabnahme wird den Luftwiderstand reduzieren und damit zu einer Erhöhung der Geschwindigkeit führen, die natürlich auch eine Erhöhung der erreichten Brennschlusshöhe führen wird. Wir schreiben  $v(t) = v_0(t) + v_1(t)$ , wobei  $v_0$  die Lösung der Bewegungsgleichung für konstante Dichte ist. Einsetzen in die Differentialgleichung und Vernachlässigung von Termen höherer Ordnung ergibt

$$\frac{dv_0}{dt} + \frac{dv_1}{dt} = \frac{\varrho_0 A c_w}{2m^*} (v_0(t) + v_1(t))^2 - g + \frac{F}{m^*} \quad (50)$$

$$= \frac{\varrho_0 (1 - \varrho_1(h(t))) A c_w}{2m^*} v_0(t)^2 + \frac{\varrho_0 A c_w}{m^*} v_0(t) v_1(t) - g + \frac{F}{m^*} \quad (51)$$

$$= \frac{\varrho_0 A c_w}{2m^*} v_0(t)^2 - g + \frac{F}{m^*} - \frac{\varrho_0 \varrho_1 (h(t)) A c_w}{2m^*} v_0(t)^2 + \frac{\varrho_0 A c_w}{m^*} v_0(t) v_1(t) \quad (52)$$

Die ersten drei Terme auf der rechten Seite ergeben zusammen mit der Ableitung von  $v_0$  auf der linken Seite die ungestörte Differentialgleichung. Die verbleibenden Terme liefern jetzt eine Gleichung für  $v_1(t)$ :

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{\varrho_0 A c_w}{m^*} v_0(t) v_1(t) - \frac{\varrho_0 A c_w}{2m^*} \varrho_1 (h(t)) v_0(t)^2 \quad (53)$$

Dies ist eine lineare Differentialgleichung erster Ordnung der Form

$$\dot{v}_1(t) = A(t) v_1(t) + B(t), \quad (54)$$

welche mit Standardmethoden gelöst werden kann. Dazu ist zunächst die homogene Gleichung zu lösen, die Lösung dafür ist bekannt, es gilt

$$v_{1,\text{hom}}(t) = C \exp \int_0^t A(\tau) d\tau \quad (55)$$

Das Integral kann wie folgt berechnet werden:

$$\int_0^t A(\tau) d\tau = \int_0^t \frac{\varrho_0 A c_w}{m^*} v_0(\tau) d\tau = \frac{\varrho_0 A c_w}{m^*} \int_0^t v_0(\tau) d\tau \quad (56)$$

$$= \frac{\varrho_0 A c_w}{m^*} h(t) = 2a^2 \cdot \frac{1}{a^2} \log \cosh abt = \log \cosh^2 abt \quad (57)$$

In unserem Fall ist  $v_0(t)$  und damit  $A(t)$  bekannt, somit kann auch dieser Term berechnet werden:

$$v_{1,\text{hom}}(t) = C \exp \int_0^t A(\tau) d\tau = C \cosh^2 abt \quad (58)$$

Die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung kann jetzt gefunden werden, indem man  $C$  als Funktion von  $t$  betrachtet, und zwar so, dass

$$\frac{dC(t)}{dt} = B(t) \exp \left( - \int_0^t A(\tau) d\tau \right) = \frac{B(t)}{\cosh^2 abt} \quad (59)$$

Die Funktion  $B(t)$  kann mit Hilfe der Differentialgleichung vereinfacht werden. Es gilt

$$- \frac{\varrho_0 A c_w}{2m^*} v_0(t)^2 = b^2 - \frac{dv_0(t)}{dt} \quad (60)$$

Darin ist  $v_0(t)$  bereits bekannt, durch Ableitung kann die rechte Seite umgeformt werden in

$$- \frac{\varrho_0 A c_w}{2m^*} v_0(t)^2 = b^2 - \frac{b}{a} \frac{d}{dt} \tanh abt = b^2 (1 - \operatorname{sech}^2 abt) = b^2 \tanh^2 abt. \quad (61)$$

Setzen wir dies in die Ausdruck für  $B(t)$  ein, den wir aus (53) ablesen können, erhalten wir

$$B(t) = - \frac{\varrho_0 A c_w}{2m^*} v_0(t)^2 \cdot \varrho_1(h(t)) = b^2 \tanh^2 abt \varrho_1(h(t)) \quad (62)$$

$$= \varrho_1(a^{-2} \log \cosh abt) b^2 \tanh^2 abt \quad (63)$$

An dieser Stelle müssen wir die Funktion  $\varrho_1(h)$  genauer festlegen. Eine lineare Approximation entspricht überhaupt nicht der Realität, eine exponentielle Abnahme würde zu einer Atmosphäre mit konstanter Temperatur passen. Verlangen wir zudem, dass der Dichtegradient mit dem in (47) gefundenen übereinstimmt, dürfte  $\varrho_1(h) = 1 - e^{-\varrho_1 h}$  ein guter Ansatz sein. Setzt man hierin  $h(t)$  ein, ergibt sich

$$\varrho_1(h(t)) = 1 - \exp \left( - \frac{\varrho_1}{a^2} \log \cosh abt \right) = 1 - (\cosh abt)^{-\frac{\varrho_1}{a^2}} \quad (64)$$

Motor	$F$	$t_B$	$b$	$\Delta v_B$	$\Delta h_B$
J350	350	2.0	8.81	2.31	0.92
J135	135	8.9	4.89	5.41	9.63

Tabelle 2: Korrektur von Brennschlussgeschwindigkeit und -höhe durch die Dichteabnahme, für die Annahmen bezüglich Raketendimensionen und Dichtegradient siehe Text

Wir schreiben  $u = \frac{\rho_1}{a^2}$ . Die Funktion  $B(t)$  kann jetzt als

$$B(t) = b^2 \tanh^2 abt(1 - \cosh^{-u} abt) \quad (65)$$

geschrieben werden. Es ist zwar noch möglich,  $C(t)$  mit Hilfe der hypergeometrischen Funktion darzustellen, doch ein Erkenntnisgewinn lässt sich daraus kaum ableiten. Man kann aber auch  $B(t)$  in eine Potenzreihe nach  $t$  entwickeln und so  $v_1(t)$  als Potenzreihe darstellen. Diese Rechnung lässt sich leichter mit Hilfe eines Computeralgebrasystems durchführen, man erhält

$$v_1(t) = C(t) \cosh^2 abt = \frac{1}{2}a^4b^6ut^4 + \frac{1}{24}a^6b^8(1 - 3u)ut^6 + O(t^7) \quad (66)$$

Durch Integration nach der Zeit kann man auch die Höhenkorrektur finden

$$h_1(t) = \frac{1}{10}a^4b^6ut^5 + \frac{1}{168}a^6b^8(2 - 3u)ut^7 + O(t^8) \quad (67)$$

Die Tabelle 2 zeigt einige numerische Beispiele für die Dichtekorrektur. Angenommen wird dabei eine Rakete mit 10cm Durchmesser und  $m^* = 4\text{kg}$ , woraus sich  $a = 0.027665\text{m}^{-1}$  ergibt. Für  $\rho_1$  wird der Wert aus (49) verwendet, womit auch  $u = 1.053$  festgelegt ist. Die Konvergenz der Störungsreihen wird schlecht, wenn  $a$ ,  $b$  oder  $u$  gross werden. Da  $u = \rho_1/a^2$  ist, wird der Koeffizient von  $t^{2k}$  von der Grössenordnung  $a^2\rho_1b^{2(k+1)}$ , somit ist vor allem ein grosser Wert von  $b$  problematisch. Dieser Fall tritt ein bei sehr grossen Startbeschleunigungen.

## 8 Numerische Lösung

Trotz der komplizierten Formeln (2) ist die Struktur der Lösung recht einfach. Für einen bestimmten Motor sind Scheitelhöhe  $h_S$  und Scheitelzeit  $t_S$  Funktionen von  $K$  und  $m$ :

$$h_S = h_S(K, m) \quad \text{und} \quad t_S = t_S(K, m) \quad (68)$$

In  $k$  gehen alle aerodynamischen Faktoren ein, die die Flughöhe beeinflussen. Je grösser  $K$ , desto grösser der Luftwiderstand und desto geringer die Scheitelhöhe.

daher ist bei fester Masse  $m$  die Funktion  $K \mapsto h_S(K, m)$  eine monoton fallende Funktion von  $K$ . Daher gibt es zu jedem  $m$  höchstens ein  $K$ , für welches eine bestimmte Scheitelhöhe  $h_S$  realisiert wird. Um die Niveaulinien von  $h_S$  zu zeichnen kann man also für jedes  $m$  das zugehörige  $K$  suchen. Zur Berechnung von  $K$  wird am einfachsten ein Intervallschachtelungsverfahren wie Regula Falsi verwendet.

Die Monotonieeigenschaft, die für  $h_S$  physikalisch unmittelbar klar war, ist bei  $t_S$  nicht so unmittelbar. Man kann sie jedoch aus den Lösungsformeln ebenfalls einsehen. Deshalb ist auch für  $t_S(K, m)$  der oben beschriebene Algorithmus anwendbar.

Der Algorithmus liefert für jeden Wert der Masse zu jeder Scheitelhöhe  $h_s$  den Wert für  $K$ , mit dem diese Scheitelhöhe erreicht wird, und für jede Scheitelzeit  $t_S$  den Wert für  $K$ , mit welchem die Rakete zu dieser Zeit den Scheitel erreicht. Damit können die Niveaulinien von  $h_S(K, m)$  und  $t_S(K, m)$  gezeichnet werden.

In der Praxis zeigt sich, dass für langbrennende Motoren oder Motoren mit stark schwankendem Schub doch keine ausreichende Genauigkeit erreicht wird, so dass statt der Fehskens-Malewicki-Lösungen eine vollständige Bahnintegration durchgeführt werden muss. Diese hat natürlich in zwei Teilen zu erfolgen entsprechend der beiden Flugphasen. Zu einem gegebenen  $K$ -Wert ist der Scheitelpunkt zu ermitteln. Dies geschieht am einfachsten dadurch, dass mit Hilfe des Newton-Verfahrens die Nullstelle der Vertikalgeschwindigkeit gesucht wird. Die dazu nötige Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit ist in Scheitelnähe, wo der Luftwiderstand vernachlässigbar wird, durch die Erdbeschleunigung  $-g$  gegeben.

Bei der ersten Implementation wurde für die Bahnintegration eine konstante Schrittweite verwendet, nur der letzte Schritt verwendete variable Schrittweite. Dies führte für Scheitelzeiten nahe bei einem Vielfachen der Schrittweite zu einer interessanten Oszillation. Durch die Korrektur des Newton-Verfahrens änderte sich die Zahl der Schritte in der Bahnintegration, die dadurch hinzugefügten Rechenfehler sorgten für eine zusätzliche Korrektur in der Gegenrichtung, so dass sich ein Attraktor der Periode 2 einstellte. Ebenso konnte es passieren, dass die durch den Sprung der Schrittzahl eingeführte Unstetigkeit zu scheinbarer vorzeitiger Konvergenz führte, in beiden Fällen sind die gefundenen Scheitelzeiten nicht zuverlässig genug, um  $K$  zu bestimmen.

Bessere Resultate erhält man, wenn man die Anzahl  $n$  der Integrationsschritte in jeder Flugphase konstant hält, und die Schrittweite für die Freiflugphase aus dem aktuellen Wert von  $t_S$  (welchen das Verfahren ja bestimmen soll) als  $\frac{t_S - t_E}{n}$  berechnet.



## 9 Bemerkungen zur Graphikerzeugung

Bei der Umsetzung der beschriebenen Algorithmen auf dem Computer stellen sich einige Probleme nicht mathematischer Art, die in diesem Abschnitt gesondert besprochen werden sollen.

### 9.1 Grosse Steigung bei grosser Masse

Bei grossen Massen spielt die Aerodynamik der Rakete eine geringe Rolle, die erreichte Scheitelhöhe ändert sich nur unwesentlich. Dasselbe gilt für die Scheitelzeit. In den Graphiken äussert sich das dadurch, dass die Steigung der Kurven  $m \mapsto h_S(m)$  und  $m \mapsto t_S(m)$  einen sehr grossen negativen Wert annimmt. Um trotzdem eine genaue graphische Darstellung zu erhalten, könnte die Auflösung in  $m$ -Richtung für grösseres  $m$  angepasst werden. Die numerische Rechnung ist wegen der grossen Steigung trotzdem relativ aufwendig. Eine wesentliche Verbesserung ergibt sich, wenn man für den Kurventeil, auf dem die Ableitung kleiner als  $-1$  ist, die Umkehrfunktion berechnet. Mittels gleichmässig verteilter  $K$ -Werte zwischen dem Punkt mit Ableitung  $-1$  und dem unteren Rand der Graphik lassen sich zuverlässige und schnell konvergierend Stützstellen für die gesuchten Kurven bestimmen.

### 9.2 Reduktion des Rechenaufwandes durch Interpolation

Die relativ langsam veränderliche Krümmung führt dazu, dass selbst bei der vergleichsweise grossen Zahl von etwa 40 Stützstellen bei linearer Interpolation der Kurve die Stützstellen als Knicke in der Kurve klar hervortreten. Eine Erhöhung der Zahl der Stützstellen erhöht jedoch auch die Anzahl der notwendigen Bahnintegrationen proportional, was zu inakzeptabel hohen Laufzeiten führt.

Genau weil die Krümmung sich sehr langsam verändert, kann man davon ausgehen, dass Spline-Interpolation eine gute Approximation der Kurve liefern würde. Begünstigt wird diese Idee von der Tatsache, dass PostScript als Graphik-Ausgabesystem über Operatoren verfügt, mit dem sich die einzelnen kubischen Segmente mit der höchsten dem Graphiksystem zur Verfügung stehenden Auflösung so glatt darstellen lassen, dass auch bei starker Vergrösserung keine Knicke mehr zu erkennen sind.

Die Spline-Interpolation [4] liefert zunächst die Werte von Funktion und Ableitung an den gewählten Stützstellen, daraus kann dann mittels Hermite-Interpolation ein kubisches Polynom gefunden werden. Andererseits verlangt der `curvto`-Operator von PostScript [1] als Argumente drei Punkte. Der Operator zeichnet eine kubische Kurve, die beim aktuellen Punkt beginnt und als Tangentenrichtung

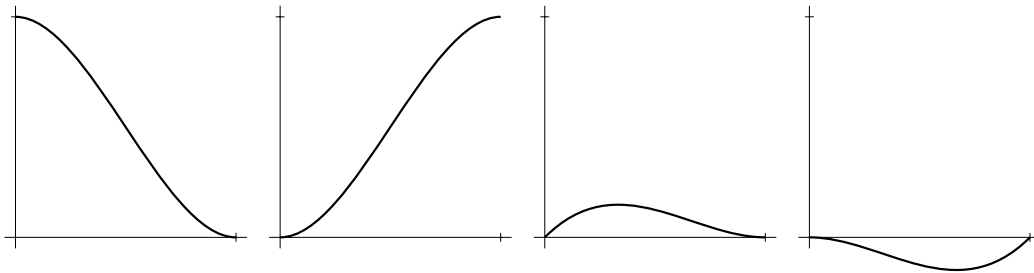


Abbildung 2: Graphen der Hermite-Polynome, implementiert durch den PostScript `curveto`-Operator

den Vektor zum ersten Argument des `curveto`-Operators hat. Die Kurve endet im dritten Argument des Operators, die Tangentenrichtung ist der Vektor vom zweiten zum dritten Argument. Die zwei Zwischenpunkte werden auch Kontrollpunkte der so definierten Bézier-Kurve genannt.

Die Verbindung zur Hermite-Interpolation wird wie folgt hergestellt. Soll das Hermite-Polynom für die Argument  $x_0$  und  $x_1$  die Funktionswerte  $y_0$  und  $y_1$  sowie die Ableitungen  $y'_0$  und  $y'_1$  haben, dann sind als Kontrollpunkte die Punkte

$$\left(\frac{1}{3}x_0 + \frac{2}{3}x_1, y_0 + \frac{1}{3}y'_0\right) \quad \text{und} \quad \left(\frac{2}{3}x_0 + \frac{1}{3}x_1, y_1 - \frac{1}{3}y'_1\right)$$

zu wählen. Die Kontrollpunkte der Bézier-Kurven können also direkt aus der Lösung des Gleichungssystem für die Spline-Interpolation gefunden werden, ohne dass die Hermite-Polynome berechnet werden müssen.

Die elementaren Hermite Polynome, welche in den Punkten  $x_0$  und  $x_1$  genau einen Funktionswert oder genau eine Ableitung gleich 1 haben, und alle anderen gleich 0, werden daher durch die folgenden PostScript-Programme beschreiben:

```
% y_0 = 1, y_0' = 0      y_1 = 0, y_1' = 0
0 1 moveto 0.333 1 0.666 0 1 0 curveto
```

```
% y_0 = 0, y_0' = 0      y_1 = 1, y_1' = 0
0 0 moveto 0.333 0 0.666 1 1 1 curveto
```

```
% y_0 = 0, y_0' = 0      y_1 = 0, y_1' = 0
0 0 moveto 0.333 0.333 0.666 0 1 0 curveto
```

```
% y_0 = 0, y_0' = 0      y_1 = 0, y_1' = 0
0 0 moveto 0.333 0 0.666 -0.333 1 0 curveto
```

Mit diesen Verbesserungen lassen sich die Nomogramme gemäss Abbildung 1 für die fast 200 Motoren umfassende Motorenpalette von Aerotech auf einem 2.7GHz PowerPC-Prozessor in etwa 7 Stunden rechnen.

## Literatur

- [1] Adobe Systems, Inc., *PostScript<sup>®</sup> Language Tutorial and Cookbook*, Addison Wesley, Reading, MA, 1985
- [2] C. Bliefert, G. Dehms, G. Morawietz, *Praktische Nomographie*, Verlag Chemie, Weinheim, 1977
- [3] I. N. Bronstein, K. A. Semendjajew, *Taschenbuch der Mathematik*, Verlag Harri Deutsch, Thun, 1981
- [4] P. Henrici, *Essentials of Numerical Analysis*, Wiley, Toronto, 1982
- [5] Gordon K. Mandell, George J. Caporaso and William P. Bengen, *Topics in Advanced Model Rocketry*, The MIT Press Classics, Cambridge, MA, 1973